Priv.Doz. Dr.(USA) Maria Charina

4. Übungsblatt zur Vorlesung "Analysis in einer Variable für LAK"

Aufgaben 4.1-4.4 sind Ankreuzaufgaben.

SS 2018

Aufgabe 4.1 Untersuchen Sie die Folgen

$$a = \left(3 - \frac{2}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}, \quad b = \left(3 + \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}, \quad c = \left(3 + (-1)^n\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}, \quad d = (n)_{n\in\mathbb{N}}$$

auf Monotonie.

Aufgabe 4.2 Bestimmen Sie Maxima, Minima, Suprema und Infima (falls sie existieren) von

$$\begin{aligned}
&(a) \qquad A = \left\{3 - \frac{2}{n} \;:\; n \in \mathbb{N}\right\},\\
&(b) \qquad B = \left\{3 + \frac{1}{n} \;:\; n \in \mathbb{N}\right\},\\
&(c) \qquad C = \left\{3 + (-1)^n\frac{1}{n} \;:\; n \in \mathbb{N}\right\},\\
&(d) \qquad D = \{n \;:\; n \in \mathbb{N}\}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 4.3 Konstruieren Sie

(a) eine Folge $a = (a(n))_{n\in\mathbb{N}}$, so dass $A = \{a(n) \;:\; n \in \mathbb{N}\}$ keine Maxima, Minima, Suprema oder Infima besitzt.

(b) eine nichtkonstante Folge, die gegen 2 konvergiert.

Aufgabe 4.4 Welche Eigenschaften hat die Folge $a = (a(n))_{n\in\mathbb{N}}$, falls

(a) $\exists\,\varepsilon > 0 \;:\; \forall\, n \in \mathbb{N} \;:\; |a(n)| < \varepsilon$,

(b) $\forall\,\varepsilon > 0 \;:\; \forall\, n \in \mathbb{N} \;:\; |a(n)| < \varepsilon$,

(c) $\forall\,\varepsilon > 0 \;:\; \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N} \;:\; \forall\, n \geq n_\varepsilon \;:\; |a(n)| < \varepsilon$.

Freiwillige Zusatzaufgabe 4.1 Untersuchen Sie die Folge $a = (a(n))_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a(1) = \sqrt{2} \quad \text{und} \quad a(n+1) = \sqrt{2 + a(n)}, \quad n \in \mathbb{N},$$

auf Monotonie und Beschränktheit. Bestimmen Sie den Grenzwert von a, falls die Folge konvergiert.

Freiwillige Zusatzaufgabe 4.2 Zeigen Sie, dass

$$(a) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{3} = 0 \quad \text{und} \quad (b) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

Freiwillige Zusatzaufgabe 4.3 Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}\right)}_{p \text{ mal, } p \text{ unabhängig von } n} = 0 \quad \text{aber} \quad \lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}\right)}_{n \text{ mal}} = 1.$$